Agrupamento de Escolas MADEIRA TORRES

Gestão Anual da Planificação do Currículo

Ano de 2026-2027

Departamento: Matemática

Disciplina: Matemática A Ano: 12º

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E INOVAÇÃO

Quadro 1

TEMA/DOMÍNIO	APRENDIZAGENS ESSENCIAIS/*Objetivos** (Conhecimentos, Capacidades e Atitudes)	Ações estratégicas/Atividades orientadas para o perfil dos alunos	Calendarização Total: 96 aulas
1 – Funções 1.1. Continuidade de uma função 1.2. Conceito intuitivo de limite 1.3. Continuidade de uma função num ponto 1.4. Continuidade e operações com funções contínuas. Função composta. 1.5. Derivabilidade e continuidade	• Reconhecer uma função contínua num ponto do seu domínio como uma função que admite limite nesse ponto igual à sua imagem. • Identificar se uma função é contínua num intervalo aberto, em casos simples, tendo como apoio o conhecimento de uma lista de funções contínuas e respetivas operações. • Conhecer e aplicar a função composta, em casos simples, analisando o seu domínio.	• Efetuar uma revisão geral sobre "Função racional". • Retomar a utilização da noção intuitiva e informal de limite num ponto, no estudo da continuidade. • Dar a conhecer aos alunos a seguinte lista de funções contínuas: – funções polinomiais; – funções trigonométricas. • Incluir nesta lista as funções obtidas a partir de funções contínuas, através das operações: – soma, diferença, produto e quociente de funções contínuas; – composição de funções contínuas. • Recorrer a exemplos simples para estudar casos de funções compostas em que se evidencie eventuais alterações aos seus domínios. • Alertar para a existência de outras funções contínuas não contempladas na lista anterior. • Alertar para a existência de funções descontínuas num intervalo aberto. Analisar alguns modelos de funções descontínuas, como, por exemplo: tarifários de estacionamento, escalões do IRS, a força exercida pelo propulsor de um foguete após o seu lançamento. • Dar a conhecer as propriedades operatórias dos limites (adição, subtração, multiplicação e divisão).	**73**
2 - Derivadas 2.1. Derivada de uma potência de expoente real	• Determinar derivadas envolvendo operações com as funções estudadas anteriormente, em casos simples. • Conhecer o teorema da derivada da função composta (regra da cadeia).	• Rever o conceito de raízes quadradas e cúbicas. • Mencionar a relação entre as potências de expoente fracionário e as raízes de índice natural: $a^{\frac{q}{n}} = \sqrt[n]{a^q}, a > 0, q \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	

2.2. Derivada da função composta 2.3. Derivada das funções trigonométricas 2.4. Segunda derivada de uma função	• Conhecer as regras de derivação para funções do tipo: $f(x) = sen\, x$; $f(x) = cos\, x$; $f(x) = tg\, x$; • Resolver problemas de otimização, tendo por base funções deriváveis. • Determinar a segunda derivada de funções polinomiais, racionais e trigonométricas. • Relacionar o sinal e os zeros da segunda derivada com o sentido das concavidades e pontos de inflexão do gráfico de uma função.	• Dar a conhecer e promover a utilização das regras de derivação, sem demonstrar, das funções trigonométricas. • Promover a resolução de problemas de otimização envolvendo funções deriváveis já estudadas, num contexto de modelação matemática. • Propor o cálculo da segunda derivada de funções. • De acordo com as Aprendizagens Essenciais, só são abordadas situações de cálculo algébrico da segunda derivada de funções cujo grau de dificuldade não ultrapasse o do seguinte exemplo: $f(x) = x^4 - 4x^3 + 7$ • Promover o estudo de funções, incluindo o sentido das concavidades e os pontos de inflexão em intervalos em que as funções têm segunda derivada.	
3 - Limites e regra de L'Hôpital. Assíntotas 3.1. Limites num ponto e limites no infinito 3.2. Regra de L'Hôpital 3.3. Assíntotas 3.4. Estudo de uma função	• Estudar o limite de funções que conduzem a indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$, aplicando a regra de L'Hôpital, usando limites notáveis ou técnicas de cálculo simples. • Determinar analiticamente as equações das assíntotas, verticais e não verticais, ao gráfico de uma função. • Resolver problemas, envolvendo o estudo de funções, complementando o uso da tecnologia com o estudo analítico.	• Promover o estudo de indeterminações para comparar magnitudes de funções quando a variável independente se aproxima de um ponto específico ou do infinito. • Alertar os alunos para as condições em que não é possível aplicar a regra de L'Hôpital e para os casos em que não é aconselhável o seu uso. • Propor a construção de uma tabela de limites notáveis, recorrendo à regra de L'Hôpital, nomeadamente: $\lim_{x\to 0} \frac{sin\ \ x}{\ \ x} = 1$ • Propor aos alunos a determinação das assíntotas verticais e não verticais ao gráfico de uma função. • De acordo com as Aprendizagens Essenciais, só são abordadas situações de cálculo algébrico das equações das assíntotas ao gráfico de funções cujo grau de dificuldade não ultrapasse o do seguinte exemplo: $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2+1}$ • Incentivar o estudo das funções, combinando as ferramentas analíticas com a tecnologia gráfica, identificando, na representação gráfica obtida, as características resultantes de processos analíticos. • Proporcionar oportunidades para compreender que as representações gráficas apresentadas pela tecnologia podem, por vezes, não corresponder com rigor ao gráfico da função em estudo	

4 - Função inversa 4.1. Definição de função inversa 4.2. Propriedades da função inversa	• Conhecer as raízes de índice natural, nomeadamente, a radiciação de índice natural como inversa da potenciação de expoente natural. • Identificar funções invertíveis e não invertíveis, nomeadamente recorrendo aos gráficos das funções e ao "teste da reta horizontal", e à sua formulação algébrica, em casos simples. • Estabelecer as relações entre o domínio e o contradomínio de funções inversas, bem como a simetria das respetivas representações gráficas, relativamente à bissetriz dos quadrantes ímpares.	• Estudar a função quadrática como exemplo de função não invertível no seu domínio. • Propor a formulação algébrica do "teste da reta horizontal" para identificar funções inversas, ou restrições do domínio em que a função é invertível. • Promover a utilização da tecnologia para estudar funções invertíveis e comparar gráficos de funções com os das suas inversas. Por exemplo, determinar a imagem pela reflexão em relação à reta de equação $y = x$ de funções diversas (polinomiais e racionais), em casos simples, e encontrar a expressão algébrica das funções obtidas, caso existam.	
5 – Funções exponenciais 5.1. Função exponencial de base a 5.2. Estudo da função exponencial de base a 5.3. Funções do tipo $y = b.a^{x-c} + b$ 5.4. Equações envolvendo exponenciais. Resolução de problemas	• Identificar a função exponencial como uma função do tipo $f(x) = a^x$, $a \in IR^+$, que verifica as propriedades $a^0 = 1$, $a^1 = a$, $a^x \times a^y = a^{x+y}$, $(a^x)^y = a^{xy}$, $a^x : a^y = a^{x-y}$, $a^x \times b^x = (a \times b)^x$ • Identificar, em funções do tipo $y = b.a^{x-c} + b, a \in IR^+, c, d \in IR, b \in IR\backslash\{0\}$, o domínio, o contradomínio, as coordenadas dos pontos de interseção com os eixos coordenados, a monotonia e o comportamento da função quando x tende para $+\infty$ e para $-\infty$. • Resolver, graficamente, equações envolvendo funções exponenciais em contexto de resolução de problemas.	• Rever as regras operatórias das potências realizado no ensino básico. • Apresentar a função exponencial num contexto de resolução de problemas de crescimento e de decrescimento exponencial, como, por exemplo, o crescimento de bactérias, o arrefecimento de um café e o decaimento radioativo. • Estudar as propriedades de funções exponenciais abordadas no início do estudo do tema. • Promover a resolução gráfica de equações envolvendo funções exponenciais. • Propor a resolução de problemas de modelação que envolvam a função exponencial, como, por exemplo, o cálculo da taxa de juro anual nominal, ou que envolvam a função logística, por exemplo, o crescimento de uma população limitado pela capacidade de carga do meio.	
		1ª Avaliação Intercalar	**48**
6 - Funções logarítmicas 6.1. Função logarítmica de base a.	• Identificar a função logarítmica como a inversa da função exponencial com a mesma base. • Estudar intuitivamente, com recurso à tecnologia, o comportamento de funções com logaritmos.	• Propor a exploração de modelos exponenciais e conduzir os alunos na identificação da relação inversa. • Promover a utilização das propriedades e regras operatórias dos logaritmos, incluindo a fórmula da mudança de base.	

6.2. Estudo da função logarítmica 6.3. Propriedades operatórias da função logarítmica. 6.4. Equações envolvendo logaritmos	• Conhecer e aplicar as propriedades e regras operatórias dos logaritmos, em casos simples, e em contexto de resolução de problemas e de modelação. • Resolver equações, envolvendo funções exponenciais e funções logarítmicas, em contexto de resolução de problemas, tanto analiticamente como graficamente.	• Referir as escalas logarítmicas na medição de certas grandezas, como por exemplo o pH de uma solução, a magnitude do som em decibéis, ou a escala logarítmica usada na medição da acuidade visual. • Estudar as propriedades de funções exponenciais abordadas no início do estudo do tema. • Promover a resolução de problemas e a modelação, com tecnologia ou analiticamente, que envolvam a função exponencial e a função logarítmica. • No estudo de funções, de acordo com as Aprendizagens Essenciais, só está incluído o trabalho com funções polinomiais, racionais, exponenciais e logarítmicas e operações entre estas.	
7 - Derivadas de funções exponenciais e logarítmicas. Limites e aplicações 7.1. Derivada da função exponencial de base e 7.2. Derivada da função exponencial de base a 7.3. Derivada da função logarítmica de base e 7.4. Derivada da função logarítmica de base a 7.5. Limites notáveis 7.6. Estudo de funções exponenciais e logarítmicas	• Identificar o número e (número de Euler) como a única base da função exponencial em que o seu gráfico coincide com o gráfico da respetiva função derivada. • Conhecer a derivada da função definida por: $f(x) = e^x$ • Identificar a função definida por $g(x) = ln\, x$ como a função inversa da função definida por $f(x) = e^x$. • Saber relacionar geometricamente a derivada da função logarítmica com a derivada da função exponencial, tendo por base a simetria das retas tangentes aos gráficos em pontos simétricos, relativamente à bissetriz dos quadrantes ímpares. • Conhecer a derivada da função definida por: $g(x) = ln\, x$ • Conhecer as regras de derivação para funções do tipo: $f(x) = e^x$ $f(x) = a^x$, com $a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$ $f(x) = x^\alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$ $f(x) = \log_a x$, com $a > 0, a \neq 1$ e $x > 0$ • Resolver problemas, envolvendo o estudo de funções, complementando o uso da tecnologia com o estudo analítico.	• Promover a utilização da tecnologia. • Fazer referência ao trabalho de Euler • Determinar a derivada de $g(x) = ln\, x$, usando tecnologia gráfica. • Dar a conhecer e promover a utilização das regras de derivação, sem demonstrar, das funções definidas por: $f(x) = x^a$, $f(x) = a^x$, $f(x) = log_{\ a}\, x$ • Promover a aplicação do teorema da derivada da função composta, generalizando as fórmulas de derivação conhecidas. • Propor a construção de uma tabela de limites notáveis, recorrendo à regra de L'Hôpital, nomeadamente: $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$; $\lim_{x\to 0} \frac{ln(x+1)}{x} = 1$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^p} = 0$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^p} = +\infty$ ($a > 1$ e $p \in \mathbb{R}$) • Determinar assíntotas verticais e não verticais ao gráfico de uma função. • De acordo com as Aprendizagens Essenciais, só são abordadas situações de cálculo algébrico das equações das assíntotas ao gráfico de funções cujo grau de dificuldade não ultrapasse o dos seguintes exemplos: $g(x) = \frac{e^x}{x+1}$ e $h(x) = x + ln\, x$	

8 - Resolução aproximada de equações 8.1. Teorema dos valores intermédios (Bolzano-Cauchy) 8.2. Método da bisseção 8.3. Método de Newton- -Raphson	• Conhecer o teorema dos valores intermédios (Bolzano-Cauchy). • Conhecer e aplicar o método da bisseção. • Conhecer e aplicar o método de Newton-Raph	• Nos problemas de otimização e no cálculo de pontos de inflexão do gráfico de uma função é proposto que o trabalho com os alunos se restrinja a funções polinomiais, racionais, exponenciais e logarítmicas e operações entre estas. • Considerar o teorema dos valores intermédios para funções contínuas em intervalos abertos que contenham o intervalo fechado em que se estudam os valores intermédios. • Apresentar como objetivo a resolução por métodos aproximados de qualquer equação, tendo em conta que existem muitas situações em que não é possível obter uma solução expressa em termos das funções já estudadas. • Promover o uso sistemático da tecnologia na aplicação dos diferentes métodos considerados para a obtenção aproximada de soluções de equações. • Ilustrar, a partir de um exemplo concreto, a interpretação geométrica do método de Newton-Raphson.	
Temas de revisão: Trigonometria e Sucessões		• Realizar revisões com vista à preparação do Exame Final Nacional com os Temas de revisão: Trigonometria e Sucessões.	
1. **Probabilidade. Regra de Laplace** 1.1. Probabilidade frequencista. Propriedades da frequência relativa 1.2. Propriedades da probabilidade 1.3. Regra de Laplace	• Distinguir entre fenómeno aleatório e não aleatório (determinístico). • Compreender que as realizações individuais de um fenómeno aleatório são incertas, mas existe um padrão genérico de comportamento, recorrendo-se à Teoria da Probabilidade para construir modelos matemáticos que descrevam a regularidade estatística observada numa longa série de repetições do fenómeno. • Compreender que: – à realização de um fenómeno aleatório se dá o nome de experiência aleatória; – ao conjunto S de resultados possíveis se dá o nome de espaço de resultados ou espaço amostral;	• Efetuar uma revisão geral sobre "Introdução ao estudo da probabilidade". • Recorrer a situações em contextos variados, para sensibilizar os alunos para a existência destes fenómenos, nomeadamente através de exemplos de fenómenos físicos, com leis determinísticas (movimento de um carro; queda de uma maçã do alto de uma torre) e de exemplos de fenómenos que se podem considerar aleatórios pela dificuldade em arranjar uma lei física para os descrever (número de irmãos de um aluno da escola, escolhido ao acaso; face do dado que fica virada para cima quando se lança; temperatura máxima a observar numa data futura). • Salientar que os modelos de probabilidade são modelos matemáticos que descrevem os fenómenos aleatórios.	**10**

	– um acontecimento é um subconjunto do espaço de resultados e que a estes resultados se dá o nome de "resultados favoráveis" à realização do acontecimento; – a descrição do fenómeno aleatório é feita através de um modelo de probabilidade, constituído pelos resultados possíveis e a probabilidade atribuída a cada resultado. • Relembrar os conceitos: acontecimento certo, impossível, elementar e composto; acontecimentos disjuntos ou mutuamente exclusivos; acontecimentos contrários ou complementares; união e interseção de acontecimentos. • Compreender que a caraterística do fenómeno aleatório permite definir, intuitivamente, a probabilidade de um acontecimento A, representada por $P(A)$, como sendo o valor para o qual estabiliza a frequência relativa da realização de A, num grande número de repetições da experiência aleatória, nas mesmas condições, ou seja, $P(A)$ é o valor em que estabiliza $\frac{nA}{n}$, em que n representa o número de vezes que se realizou A em n repetições da experiência aleatória. • Reconhecer que as probabilidades associadas aos acontecimentos elementares têm de ser números entre 0 e 1 e que a soma total deve ser 1. • Reconhecer que a probabilidade de um acontecimento é igual à soma das probabilidades dos acontecimentos elementares constituídos pelos resultados que o compõem. • Utilizar a representação dos acontecimentos em diagramas de Venn, para mostrar que, dados dois acontecimentos A e B quaisquer: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ • Reconhecer que se admite que os acontecimentos elementares são equiprováveis quando não haja, à partida, razão para admitir que os resultados do espaço de resultados não tenham igual possibilidade de se verificarem. • Compreender que, quando se puder admitir que os acontecimentos elementares são equiprováveis, se pode utilizar a regra de Laplace para determinar a probabilidade de um acontecimento A, com o seguinte enunciado: • $P(A) = \frac{\text{Número de resultados favoráveis a } A}{\text{Número de resultados possíveis}}$.	• Realçar que, para construir um modelo de probabilidade, tem de se recorrer a um processo que permita atribuir probabilidades aos acontecimentos elementares. • Iniciar o estudo deste tema com modelos de probabilidade simples, com espaços de resultados finitos, nomeadamente os que descrevem os chamados "jogos de sorte e azar". Por exemplo, intuitivamente, espera-se que, ao fim de muitas repetições do lançamento do dado, cada uma das faces saia, aproximadamente, 16,6(6)% das vezes. Alguns acontecimentos, associados a esta experiência, são: "sair uma face com um número de pintas par", "sair uma face com um número de pintas maior ou igual a 5", "sair uma face com um número de pintas maior do que 6", etc. • Propor a resolução de problemas que envolvam o cálculo de probabilidades recorrendo à regra de Laplace, evitando o uso excessivo de cálculo combinatório. • Realçar que, uma vez definido o modelo de probabilidade, se pode calcular a probabilidade de qualquer acontecimento associado ao fenómeno em estudo. • Alertar os alunos para o facto de que na vida real as situações mais frequentes são aquelas em que não é possível recorrer à regra de Laplace para calcular a probabilidade de acontecimentos, por exemplo: o tipo sanguíneo de uma pessoa escolhida ao acaso, de entre a população portuguesa, ou a eficácia de uma vacina.	
As restantes aulas serão utilizadas para apresentações, avaliações formativa e sumativa, recuperação de aprendizagens e outras atividades pedagógicas aprovada em conselho pedagógico e/ou conselhos de turma.			**13**

		1º semestre	**96 aulas**
2. Probabilidade condicionada. Regra do produto. Acontecimentos independentes 2.1. Definição. Tabelas de contingência 2.2. Regra do produto. Árvore de probabilidade 2.3. Acontecimentos independentes	• Saber que a probabilidade de um acontecimento A se realizar, condicionada ao saber que o acontecimento B se realizou, com $P(B)>0$, se representa por $P(A\mid B)$ e se calcula de acordo com a seguinte fórmula: $P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ • Reconhecer que, a partir da definição de probabilidade condicionada, se pode definir a probabilidade simultânea de dois acontecimentos, chamada regra do produto: $P(A\cap B)=P(A)P(B\mid A)$ ou $P(A\cap B)=P(B)P(A\mid B)$ conforme seja A ou B o acontecimento que está a condicionar. • Reconhecer a utilidade das árvores de probabilidade para organizar a informação disponível sobre os acontecimentos em cadeia. • Reconhecer a utilidade das tabelas de contingência para calcular a probabilidade condicionada. • Identificar que os acontecimentos A e B, com $P(A)>0$ e $P(B)>0$, são independentes quando a ocorrência de um deles não altera a probabilidade da ocorrência do outro, ou seja, $P(A\mid B)=P(A)$ (A independente de B) ou $P(B\mid A)=P(B)$ (B independente de A). • Reconhecer que outra definição de independência consiste em dizer que os acontecimentos A e B são independentes se e só se: $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ As duas definições de independência são equivalentes desde que se exija que $P(A)>0$ e $P(B)>0$.	• Conduzir os alunos a reconhecerem que, em muitas situações em que se pretende calcular a probabilidade de um acontecimento, já se dispõe de alguma informação sobre o resultado da experiência, a qual permite atualizar a atribuição de probabilidade a esse acontecimento. • Exemplificar com situações intuitivas, como a extração sucessiva de bolas, de vários tipos, de uma caixa, sem reposição, em que a composição da caixa se altera, implicando que a probabilidade de retirar uma bola de determinado tipo depende dos tipos de bolas que saíram nas extrações anteriores. • Pedir aos alunos que calculem a probabilidade de ocorrência de cadeias simples de acontecimentos, utilizando árvores de probabilidade, como forma de organização da informação disponível. • Salientar que uma das situações mais simples para compreender intuitivamente o conceito de independência de acontecimentos está ligada à situação do lançamento de uma moeda. A moeda "não tem memória" e a probabilidade de sair "face nacional" no próximo lançamento não depende do que saiu nos lançamentos anteriores. Porém, no acontecimento "selecionar o nome de dois alunos do sexo masculino" de uma turma com 14 rapazes e 16 raparigas, a probabilidade de selecionar o segundo rapaz depende da escolha do primeiro aluno (seleção sem reposição). • Promover a resolução de problemas em que se obtenha a probabilidade de um certo acontecimento B, quando são conhecidas as probabilidades de B condicionadas aos acontecimentos $(A_1, A_2, ..., A_n)$, mutuamente exclusivos em que a sua união é igual ao espaço de resultados e são conhecidas as suas probabilidades, não nulas, utilizando: $P(B)=P(B\mid A_1)P(A_1)+...+P(B\mid A_n)P(A_n)$	**20**
3. Modelos de probabilidade em espaços finitos 3.1. Variáveis aleatórias	• Reconhecer que se podem associar números aos resultados de um fenómeno aleatório, através de uma função denominada variável aleatória (v.a.) e que construir um modelo de probabilidade para modelar um fenómeno aleatório, com espaço de resultados finito, é equivalente a	• Exemplificar e orientar os alunos na construção de modelos de probabilidade simples, nomeadamente o que descreve o resultado do lançamento de um dado equilibrado, em que se define a variável aleatória X, que associa a cada face do dado o seu número de pintas.	

3.2. Função massa de probabilidade 3.3. Valor médio e desvio-padrão amostral	construir a função massa de probabilidade (f.m.p.) da variável aleatória associada. • Identificar a população com a variável aleatória associada e reconhecer que construir a f.m.p. é obter um modelo para a população. • Reconhecer que a f.m.p. permite calcular a probabilidade de acontecimentos, relacionados com a realização do fenómeno modelado. • Reconhecer que dois dos parâmetros, características numéricas da população, mais importantes são o valor médio (média populacional) e o desvio-padrão populacional, e saber que estes parâmetros se representam pelas letras gregas μ (miu) e σ (sigma), respetivamente. • Compreender o paralelismo entre valor médio μ e a média $\bar{x}$ e, também, de modo idêntico, para o desvio-padrão populacional σ e desvio-padrão (amostral) s, e outras medidas calculadas para a população e para a amostra. • Calcular o valor médio e o desvio-padrão populacional de uma variável aleatória de suporte finito, a partir da f.m.p..	• Destacar a situação do lançamento de dois dados em que se pretende modelar o fenómeno aleatório que consiste em observar a soma das pintas dos dois dados e chamar a atenção para que, embora o número de resultados possíveis seja igual a 11, a probabilidade de cada um não é $\frac{1}{11}$. • Propor o cálculo do valor médio e do desvio-padrão, recorrendo à f.m.p. em exemplos como o do lançamento do dado e de outros modelos, como seja a extração de bolas de um saco com e sem reposição. • Salientar que a fórmula utilizada para calcular o valor médio é semelhante à fórmula utilizada para calcular a média com os dados discretos agrupados em tabelas de frequências relativas, destacando a interpretação frequencista da probabilidade, em que as frequências relativas são interpretadas como probabilidades. • Orientar na interpretação do valor médio, utilizando exemplos associados a jogos.	
		2ª Avaliação Intercalar	**24**
4 - Modelo Normal 4.1. Distribuição Normal 4.2. Valores de referência da distribuição Normal 4.3. Modelo Normal e calculadora gráfica Tema de revisão: Contagem **1 - Forma algébrica de um número complexo**	• Reconhecer o modelo ou distribuição Normal, de suporte contínuo, como um dos modelos de probabilidade mais importantes para a modelação de fenómenos aleatórios • Identificar que as curvas que representam esta família de modelos são simétricas, com o aspeto de um sino, e que cada distribuição Normal fica definida através dos parâmetros valor médio μ e desvio-padrão σ. • Saber que o valor médio determina o eixo de simetria da distribuição e que a distância entre o valor médio e as abcissas dos pontos de mudança de curvatura é igual ao desvio-padrão. • Calcular probabilidades com base nesta família de modelos. • Contextualizar historicamente a origem dos números complexos. • Identificar a unidade imaginária e o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos.	• Salientar que é necessário alargar o conceito de modelo de probabilidade a situações em que o espaço amostral não seja finito, como, por exemplo, o número de carros que passam numa determinada portagem das 8:00 às 9:00, em que se considera como suporte do modelo os números naturais, ou o comprimento do salto de um atleta, em que o suporte da variável comprimento é $\mathbb{R}^+$. • Destacar que o modelo Normal é, dos modelos contínuos, o mais conhecido para estudar variáveis aleatórias de suporte contínuo, como, por exemplo, a "altura" ou o "peso" de um indivíduo adulto. • Salientar a curva em forma de "sino" como representativa do modelo Normal, bem como o significado nessa curva dos valores da probabilidade associados a intervalos. • Utilizar a tecnologia para calcular probabilidades, com base no modelo Normal, associadas a quaisquer intervalos. • Estimular a pesquisa na internet sobre a evolução do conceito de número, desde os números naturais até à formalização dos números complexos.	

1.1. Conjunto dos números complexos. Definições 1.2. Plano complexo ou plano de Argand 1.3. Operações com números complexos 1.4. Potências de base i e expoente natural 1.5. Igualdade de números complexos	• Resolver equações do 2.º grau, de coeficientes reais, quando não existem raízes reais. • Representar números complexos na forma algébrica, identificando parte real, parte imaginária, módulo e conjugado, bem como números imaginários puros em $\mathbb{C}$. • Estabelecer a igualdade de números complexos na forma algébrica. • Efetuar operações elementares com números complexos na forma algébrica (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação). • Representar números complexos no plano de Argand-Gauss e identificar números complexos a partir das suas imagens geométricas.	• Sugerir a adaptação do programa efetuado em Python para a resolução de equações do 2.º grau, incorporando números complexos. • Conduzir o aluno a verificar que existem equações do 3.º grau (de coeficientes reais) que têm uma, duas ou três soluções em $\mathbb{C}$, sendo que pelo menos uma delas é sempre real e as outras duas se complexas são conjugadas. • Salientar que dois complexos são iguais se coincidem, respetivamente, nas suas partes reais e imaginárias. • Realçar que nas operações elementares entre números complexos se mantém a generalidade das propriedades das operações definidas em $\mathbb{R}$. • Sugerir a construção geométrica dos pontos correspondentes à soma e ao produto de dois números complexos, utilizando ferramentas tecnológicas	**30**
1.6. Resolução de equações em $\mathbb{C}$ **2. Forma trigonométrica de um número complexo** **2.1.** Argumento de um número complexo **2.2.** Representação trigonométrica de um número complexo **2.3.** Operações na forma trigonométrica **2.4.** Raízes índice n de um número complexo	• Representar números complexos na forma trigonométrica. • Estabelecer a igualdade de dois números complexos na forma trigonométrica, bem como comparar números complexos cujas imagens geométricas estão em posições simétricas em relação ao eixo real, ao eixo imaginário ou à origem. • Efetuar operações com números complexos na forma trigonométrica (multiplicação, divisão, potenciação e radiciação). • Resolver equações simples em $\mathbb{C}$.	• Salientar que um número complexo na forma trigonométrica pode ser representado por $\rho.e^{i\theta}$, em que $e^{i\theta} = cos\,\theta + i\,sin\,\theta$, ρ é o módulo ($\rho > 0$) e θ o argumento do complexo (argumento principal se $\theta \in]-\pi,\pi]$, ou argumento não negativo mínimo se $\theta \in [0,2\pi[$). • Realçar a equação de Euler, $e^{i\pi} + 1 = 0$, por envolver os cinco símbolos mais importantes da Matemática $(1{,}0,\ \pi,\ e,\ i)$. • Levar os alunos a verificar que dois números complexos são iguais se tiverem o mesmo módulo e o seu argumento diferir em $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. • Fomentar a obtenção de números complexos na forma trigonométrica resultantes de operações entre complexos (potenciação e radiciação), evidenciando a sua interpretação geométrica (casos simples).	
3. **Conjuntos definidos por**	• Caracterizar domínios planos através de condições na variável complexa e vice-versa.	• Propor a identificação de condições na variável complexa que representam regiões do plano complexo e vice-versa (circunferências, círculos, semirretas, retas e semiplanos).	

condições na variável complexa 3.1. Conjuntos de pontos no plano complexo definidos por retas 3.2. Circunferência e círculo 3.3. Mediatriz de um segmento de reta e semiplanos 3.4. Condições envolvendo semirretas **Tema opcional** **1. Estatística e probabilidade** 1.1. Parâmetros e estatísticas 1.2. Estimação 1.3. Distribuição de amostragem 1.4. Teorema Limite Central	• Compreender que o raciocínio indutivo ou inferencial se utiliza quando se pretende estudar uma população, analisando só alguns elementos dessa população, ou seja, uma amostra, e que, a partir das propriedades verificadas na amostra, se inferem propriedades para a população. •Conhecer que parâmetro é uma caraterística numérica da população e que estatística é uma caraterística numérica da amostra. •Compreender que um dos objetivos pretendidos ao recolher uma amostra da população, que se pretende estudar, é tirar conclusões sobre os parâmetros dessa população, considerando-se funções adequadas, estatísticas, que só dependem dos elementos da amostra. • Saber que à estatística utilizada para estimar um parâmetro também se dá o nome de estimador e que ao valor do estimador para uma determinada amostra também se chama estimativa. •Compreender que é necessário recolher uma amostra aleatória quando se pretende utilizá-la para retirar conclusões para a população subjacente, pois só assim será possível utilizar a probabilidade para quantificar o erro cometido ao inferir, para a população, os resultados aí verificados. •Compreender que os processos de seleção da amostra podem ser sem reposição ou com reposição. •Compreender que o processo da seleção da amostra é o primeiro passo importante para uma inferência estatística eficiente. ·	•Recorrer a contextos variados, que levem os alunos a tomar consciência de situações aleatórias, em que é necessário tomar decisões sobre populações, a partir de alguma informação recolhida dessas populações, na forma de dados. •Orientar os alunos na leitura da ficha técnica que acompanha o resultado de uma sondagem, alertando que a tomada de decisões tem um erro associado, que vai ser contabilizado em termos de probabilidade. •Salientar que o parâmetro é uma caraterística numérica da população (normalmente desconhecida), enquanto a estatística é uma caraterística numérica da amostra (que se pode calcular). Exemplificar situações, como, por exemplo, a média das alturas de todos os portugueses adultos, que é um parâmetro, enquanto a média das alturas de uma amostra é uma estatística, ou a proporção de eleitores decididos a votar em determinado candidato presidencial, que é um parâmetro, e a proporção de eleitores que, numa amostra, disseram ir votar nesse candidato, que é uma estatística. •Chamar a atenção dos alunos que o termo estatística se utiliza tanto para referir uma função das amostras, o estimador ($\bar{x}$) como o valor observado dessa função para uma determinada amostra que tenha sido selecionada, a estimativa ($\bar{x}$). · Orientar os alunos na recolha de uma amostra, necessariamente aleatória, quando se pretende utilizá-la para estimar um parâmetro. Realçar que o valor do estimador depende da amostra considerada, podendo-se obter tantas estimativas	**12**

	• Compreender que, para averiguar a eficácia de um estimador para estimar um parâmetro, é necessário conhecer a sua distribuição de amostragem, ou seja, a distribuição dos valores obtido pelo estimador, quando se consideram todas as amostras possíveis (da mesma dimensão), utilizando um determinado esquema de amostragem. • Compreender que a distribuição de amostragem de um estimador depende da dimensão das amostras consideradas e apresentará tanto menor variabilidade, quanto maior for a dimensão das amostras. • Compreender a utilização do Teorema Limite Central (TLC) na obtenção da distribuição de amostragem da média, quando se consideram amostras aleatórias de dimensão suficientemente grande, legitimando a utilização do modelo Normal e a utilização da média como estimador do valor médio μ. • Reconhecer as limitações das estimativas pontuais, na medida em que, devido à variabilidade amostral, podem apresentar tantos valores diferentes quantas as amostras utilizadas para as obter.	diferentes, quantas as amostras consideradas, da mesma dimensão, sendo esta variabilidade inerente à aleatoriedade da escolha da amostra. • Exemplificar a construção da distribuição de amostragem do estimador da proporção de homens numa população constituída por 3 mulheres e 2 homens, recolhendo amostras de dimensão 2. • Conduzir, dada uma certa população, à obtenção da distribuição de amostragem da média, quando se pretende estimar o valor médio dessa população, utilizando a tecnologia gráfica para simular a recolha de amostras de determinada dimensão. • Chamar a atenção dos alunos para a existência de duas fórmulas para calcular o desvio-padrão amostral, obtido a partir das fórmulas para a variância amostral: $s^2 = \frac{\sum_1^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$ e $s^2 = \frac{\sum_1^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$ e explicar que a razão da utilização da primeira é ser a que fornece melhores estimativas quando se está a estimar o desvio-padrão populacional . • Salientar que obter a distribuição de amostragem da média seria uma tarefa, a maior parte das vezes, impossível, pois teria de se calcular o valor da média para todas as amostras aleatórias de determinada dimensão, de populações de grandes dimensões ou eventualmente infinitas. Esta situação é resolvida pelo TLC, segundo o qual o modelo Normal é uma aproximação para a sua distribuição de amostragem, independentemente da forma da distribuição da população subjacente. • Exemplificar a recolha de várias amostras aleatórias, da mesma dimensão, calculando o valor da média para cada uma delas, e explorar esta situação, chamando a atenção para a impossibilidade de saber qual das estimativas se deve utilizar para estimar o parâmetro valor médio, desconhecido, da população subjacente às amostras consideradas.	
2. Intervalos de confiança 2.1. Intervalos de confiança para o valor médio 2.2. Intervalo de confiança para a proporção	• Utilizar o modelo Normal como aproximação da distribuição de amostragem do estimador média, para estimar o valor médio μ, desconhecido, de uma população com desvio padrão σ, para obter a seguinte probabilidade $P\left(\bar{X} - 1{,}96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + 1{,}96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0{,}95$ e chamar ao intervalo $\left[\bar{X} - 1{,}96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 1{,}96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ um intervalo de 95% de	• Explorar o significado de intervalo aleatório, cuja leitura correta deve ser realçada, tendo em consideração que o aleatório está nos limites do intervalo, pelo que se deve ler "a probabilidade do intervalo conter μ é 95%" e não "a probabilidade de μ estar contido".	

3. Margem de erro, dimensão da amostra e confiança Temas de revisão: Modelos Matemáticos para a Cidadania, Geometria e Estatística Atividades de revisão, introdução, consolidação, avaliação e recuperação	confiança para μ, em que se substitui o parâmetro σ, quando desconhecido, pelo desvio- -padrão amostral. • Reconhecer a fórmula geral para o intervalo de confiança, com uma confiança de $100(1-\alpha)\%$: $\left[\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + Z_{1+\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$em que $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ é o percentil de probabilidade $100\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\%$e saber que a margem de erro é igual a metade da amplitude do intervalo. • Reconhecer que a proporção (populacional) é um caso particular do valor médio de uma população constituída por uns e zeros, conforme a caraterística que se está a estudar está ou não presente na população e que o estimador que se utiliza é a proporção amostral, que se representa por $\bar{P}$. • Saber fazer uma leitura adequada da informação veiculada pela comunicação social quando apresentam resultados de sondagens, na forma de intervalos de confiança.	• Realçar o significado da confiança de 95%. Sugerir que essa confiança pode ser entendida do seguinte modo: se recolhêssemos 100 amostras e se calculássemos para cada uma delas o intervalo $\left[\bar{X} - 1{,}96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 1{,}96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ esperar-se-ia que, aproximadamente, 95 dos intervalos contivessem o valor médio ; como, na prática, só se recolhe uma amostra, só se calcula um intervalo, não se sabendo se é um dos que contêm ou não μ. • Propor a elaboração de um programa em Python que calcule o intervalo de 95% de confiança para o valor médio. • Explorar a relação entre a margem de erro, a confiança e a dimensão da amostra a recolher, para construir a estimativa intervalar. • Orientar os alunos na obtenção do intervalo de confiança para a proporção , admitindo que o modelo de probabilidade para a população é X | 1 | 0 **Probabilidade** | p | $1-p$ Valor médio de X – p Variância de X – $p(1-p)$ • Realizar atividades de introdução aos tópicos de cada tema a partir das tarefas iniciais. • Desenvolver o pensamento computacional, assim como as restantes capacidades matemáticas transversais, realizando em pares ou em grupo as tarefas do Máximo On, com recurso ao Python. • Utilizar alguns dos recursos digitais associados ao manual para introduzir e consolidar conteúdos. • No final do tema, ao longo do mesmo, ou ao terminar cada tópico, recuperar e consolidar aprendizagens com os recursos existentes (Tarefa de consolidação, síntese e Avaliação formativa) como prática regular de verificar e monitorização das aprendizagens, incentivando a autorregulação. • Realizar revisões com vista à preparação do Exame Final Nacional com os Temas de revisão: Modelos matemáticos para a Cidadania, Geometria e Estatística e propor a resolução das Questões para preparar o Exame	

As restantes aulas serão utilizadas para apresentações, avaliações formativa e sumativa, recuperação de aprendizagens e outras atividades pedagógicas aprovada em conselho pedagógico e/ou conselhos de turma.	6
2º Semestre	**72 aulas**
Total Anual	

Quadro 2

Avaliação	
Modalidades	Instrumentos
Formativa e sumativa	▪ Fichas de avaliação ▪ Questões aula ▪ Tarefas de avaliação formativa ▪ Trabalhos individuais/grupo
Nota: no início do ano letivo o professor dará a conhecer aos alunos o conjunto preferencial de instrumentos de avaliação a utilizar.	
Estratégias / Recursos	

Recursos:

- Manual adotado;
- Microsoft Teams;
- Recursos multimédia (vídeos, apresentações em Powerpoint, animações de resoluções de exercícios, software matemático, entre outros);
- Calculadora gráfica;
- Equipamento individual informático;
- RED (Recursos Educativos Digitais);
- Sites: Iave, matemática.pt e Matemática Absolutamente e #Estudo em casa.

Estratégias de autorregulação/avaliação formativa

- Indicar um conjunto de exercícios de referência para cada tema;
- Promover a realização de resumos / formulários dos temas;
- Promover a autonomia e o trabalho colaborativo, de modo a melhorar o processo ensino/avaliação/aprendizagem;
- Fornecer feedback de qualidade aos alunos;
- Aplicar a avaliação formativa através de diversas atividades;
- Promover a participação ativa dos alunos para a correção das fichas de avaliação e questões aula identificando as suas dificuldades;
- Promover a investigação junto dos alunos, incentivando-os à descoberta, à formulação de hipóteses e conjeturas e à posterior apresentação.
- Promover a autoavaliação e heteroavaliação.